NGUYỄN VŨ LƯƠNG – NGUYỄN VĂN MẬU – NGUYỄN VĂN XOA

TUYỂN TẬP
ĐỀ THI TUYỂN SINH THPT CHUYÊN
MÔN : TOÁN

(ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI)

(Tái bản lần thứ nhất)

- *Đề thi từ năm học 1989 - 2006*
- *Đề luyện tập*
- *Hướng dẫn giải chi tiết*

(Dùng cho học sinh các lớp 7, 8, 9)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Lời nói đầu

Khối THPT Chuyên Toán (nay là Khối Chuyên Toán – Tin) của Trường Đại học Khoa học Tự nhiên thuộc Đại học Quốc gia Hà Nội được thành lập đầu tiên từ năm 1965 theo quyết định của cố Thủ tướng Chính phủ Phạm Văn Đồng. Sau đó, từ năm 1985, các Khối Chuyên Lý, Hóa, Sinh lần lượt ra đời. Học sinh các khối chuyên của Trường đã đạt được nhiều thành tích đáng kể trong các kì thi Olympic trong nước và quốc tế.

Hằng năm, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên Hà Nội đều tổ chức thi tuyển để tuyển chọn những học sinh có năng khiếu ở mọi miền đất nước. Các em đều phải thi môn Toán (vòng 1), riêng thí sinh thi vào Chuyên Toán – Tin phải thi thêm môn Toán (vòng 2).

Để giúp các em học sinh hiểu thêm về nội dung, chương trình cũng như mức độ khó, dễ của các đề thi, chúng tôi cho ra mắt tuyển tập này. Đây cũng là tài liệu giúp các em có khả năng tự học, tự ôn luyện nâng cao khả năng tư duy, sáng tạo và năng lực giải toán. Ngoài các đề thi chính thức (cả vòng 1 và vòng 2) của những năm gần đây, tuyển tập còn đưa thêm nhiều đề tự luyện để các em tham khảo.

Phần đề thi chính thức do tác giả sưu tầm và tự giải nên không thể tránh khỏi khiếm khuyết. Các tác giả rất mong nhận được ý kiến đóng góp của bạn đọc để lần tái bản sau cuốn sách được hoàn thiện hơn.

Các tác giả

PHẦN I. ĐỀ THI CHÍNH THỨC

A. ĐỀ BÀI

Đề thi năm 1989 - (Khối chuyên Toán và chuyên Tin - Vòng 1)

Thời gian làm bài : 180 phút

Bài 1. Cho đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$.

Biết rằng với mọi giá trị nguyên của x, giá trị của đa thức $P(x)$ đều là những số chính phương (nghĩa là bằng bình phương của số nguyên). Chứng minh rằng các hệ số a, b, c đều là những số nguyên, và b là một số chẵn.

Bài 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$a^2 + ab + b^2 - 3a - 3b + 1989$$

Giá trị nhỏ nhất đó đạt được tại giá trị nào của a và b ?

Bài 3. Chứng minh rằng trong 52 số nguyên dương bất kỳ luôn luôn có thể tìm được 2 số sao cho tổng hoặc hiệu của 2 số đó chia hết cho 100.

Bài 4.

Cho tam giác ABC. Về phía ngoài tam giác vẽ các góc $\widehat{BAx} = \widehat{CAy} = 21^\circ$. Hạ BE vuông góc với Ax (E nằm trên Ax), CF vuông góc với Ay (F nằm trên Ay). M là trung điểm của BC.

1. Chứng minh rằng tam giác MEF là tam giác cân.
2. Tính các góc của tam giác MEF.

Bài 5. Có 9 học sinh vừa lớp A vừa lớp B xếp thành một hàng dọc, đứng cách đều. Chứng minh rằng có ít nhất 1 học sinh đứng cách 2 bạn cùng lớp với mình một khoảng cách như nhau.

Đề thi năm 1989 - (Khối chuyên Toán và chuyên Tin - Vòng 2)

Thời gian làm bài : 180 phút

Bài 1. Phân tích biểu thức :

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2$$

thành bốn nhân tử.

Bài 2.

1. Cho biết $\dfrac{x}{x^2 + x + 1} = -\dfrac{2}{3}$.

   Hãy tính giá trị của biểu thức $\dfrac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}$.
2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$\frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1}.$$

   Giá trị lớn nhất đó đạt được tại giá trị nào của x ?

Bài 3. Cho biểu thức $P(n) = a^n + bn + c$, trong đó a, b, c là những số nguyên. Chứng minh rằng nếu với mọi giá trị nguyên dương của $n, P(n)$ luôn chia hết cho m (m là số nguyên dương cố định), thì b^2 phải chia hết cho m.

Với ví dụ sau đây hãy chứng tỏ rằng không thể suy ra b chia hết cho m :

$$P(n) = 3^n + 2n + 3 \quad (\text{xét khi } m = 4).$$

Bài 4. Cho đa giác lồi sáu cạnh $ABCDEF$. M, I, L, K, N, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA. Chứng minh rằng các trọng tâm của hai tam giác MNL và HIK trùng nhau.

Bài 5. Giả sử trong một trường có n lớp, ta ký hiệu a_m là số học sinh của lớp thứ m, d_k là số lớp trong đó mỗi lớp có ít nhất k học sinh, M là số học sinh của lớp đông nhất. Chứng minh rằng :

1. $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = d_1 + d_2 + \cdots + d_M$.
2. $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = d_1 + 3d_2 + 5d_3 + \cdots + (2k-1)d_k + \cdots + (2M-1)d_M$.

Đề thi năm 1989 - (Khối chuyên Lý)

Thời gian làm bài : 180 phút

Bài 1. Tìm tất cả những giá trị nguyên của x để biểu thức sau là số nguyên

$$\frac{-2x^2 + x + 36}{2x + 3}.$$

Bài 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$a^2 + ab + b^2 - 3a - 3b + 3.$$

Giá trị nhỏ nhất đó đạt được tại giá trị nào của a và b ?

Bài 3.

1. Chứng minh rằng với mọi m nguyên dương, biểu thức $m^2 + m + 1$ không phải là số chính phương (nghĩa là không thể bằng bình phương của số nguyên).
2. Chứng minh rằng với mọi m nguyên dương, $m(m+1)$ không thể bằng tích của bốn số nguyên liên tiếp.

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông cân, góc $A = 90°$. CM là trung tuyến (M nằm trên AB). Từ A vẽ đường thẳng vuông góc với MC cắt BC ở H. Tính tỷ số $\dfrac{BH}{HC}$.

Bài 5. Có 6 thành phố, trong đó cứ 3 thành phố bất kỳ thì có ít nhất 2 thành phố liên lạc được với nhau. Chứng minh rằng trong 6 thành phố nói trên tồn tại 3 thành phố liên lạc được với nhau.

Đề thi năm 1991- (Khối chuyên Toán và chuyên Tin - Vòng 1)

Thời gian làm bài : 180 phút

Bài 1.

1. Giải và biện luận phương trình :

$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\sqrt{b}$$

với a, b là các số dương đã cho.

2. Cho phương trình $x^2+ax+b+1=0$ ($a, b \in \mathbb{Z}$ và $b \neq -1$). Chứng minh rằng nếu phương trình có hai nghiệm đều là những số nguyên thì a^2+b^2 là hợp số.

Bài 2. Cho a, b, c là các số đôi một khác nhau và khác 0. Giải hệ :

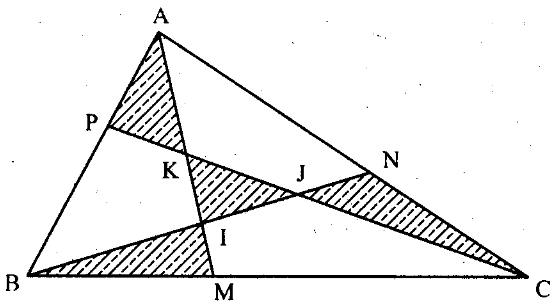
$$\begin{cases} a^3x+a^2y+az=1 \\ b^3x+b^2y+bz=1 \\ c^3x+c^2y+cz=1 \end{cases}$$

Bài 3.Tìm nghiệm nguyên, dương của phương trình : $7^x = 3.2^y + 1$.

Bài 4.

1. Cho hình thang $ABCD$ ($AB//CD$). Gọi giao điểm của AD và BC là E, giao điểm của AC và BD là F. Chứng minh rằng đường thẳng EF đi qua trung điểm của hai đáy AB, CD.

2. Cho tam giác ABC. M, N, P lần lượt là các điểm trên các cạnh BC, CA, AB. Nối AM, BN, CP (hình vẽ). Chứng minh rằng nếu diện tích



của bốn tam giác gạch chéo bằng nhau thì diện tích của ba tứ giác không gạch chéo cũng bằng nhau.

Bài 5. Tồn tại hay không 1991 điểm trên mặt phẳng sao cho ba điểm bất kỳ trong chúng là ba đỉnh của một tam giác có một góc tù ?

Đề thi năm 1991 - (Khối chuyên Toán và chuyên Tin - Vòng 2)

Thời gian làm bài : 180 phút

Bài 1.

1. Rút gọn biểu thức :

$$A = \sqrt[3]{2\sqrt{3} - 4\sqrt{2}}.\sqrt[6]{44 + 16\sqrt{6}}.$$

2. Phân tích biểu thức sau thành tích các nhân tử :

$$P = (x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5.$$

Bài 2.

1. Cho các số $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ thoả mãn các điều kiện :

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \dfrac{\alpha}{a} + \dfrac{\beta}{b} + \dfrac{\gamma}{c} = 0 \end{cases}$$

Hãy tính giá trị của biểu thức $A = \alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2$.

2. Cho bốn số a, b, c, d; mỗi số đều không âm và nhỏ hơn hoặc bằng 1. Chứng minh rằng :

$$0 \leqslant a + b + c + d - ab - bc - cd - da \leqslant 2.$$

Khi nào thì dấu đẳng thức xảy ra ?

Bài 3. Cho trước a và d là những số nguyên dương. Xét tất cả các số có dạng :

$$a, a+d, a+2d, \ldots, a+nd, \ldots$$

Chứng minh rằng trong các số đó có ịt nhất một số mà 4 chữ số đầu tiên của nó là 1991.

Bài 4.

Trong một cuộc hội thảo khoa học có 100 người tham dự. Giả sử mỗi người đều quen biết với ít nhất 67 người. Chứng minh rằng có thể tìm được một nhóm 4 người mà bất kỳ 2 người trong nhóm đó đều quen biết nhau.

Bài 5.

1. Cho hình vuông $ABCD$. Lấy điểm M nằm trong hình vuông sao cho: $\widehat{MAB} = \widehat{MBA} = 15°$.
   Chứng minh rằng tam giác MCD là tam giác đều.
2. Hãy xây dựng một tập hợp gồm 8 điểm có tính chất : Đường trung trực của đoạn nối hai điểm bất kỳ luôn đi qua ít nhất hai điểm của tập hợp điểm đó.

Đề thi năm 1992 - (Khối chuyên Lý - Hoá)

Thời gian làm bài : 180 phút

Bài 1.

1. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} (x+y)^2 y = 2 \\ (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 1 \end{cases}$$

2. Cho $x, y > 0; x + y = 1$. Chứng minh rằng :

$$8(x^4 + y^4) + \frac{1}{xy} \geqslant 5.$$

Bài 2. Giả sử m là một tham số để phương trình :

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = m$$

có bốn nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4 đều khác không.

Hãy tính giá trị của biểu thức sau đây theo m :

$$P = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}.$$

Bài 3. Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c, AD$ là đường phân giác trong của góc A.

1. Chứng minh rằng $AD^2 = AB.AC - DB.DC$
2. Tính AD theo a, b, c.

Bài 4. Cho tam giác ABC có AM, BN là các đường trung tuyến xuất phát từ A và B; AD, BE là các đường phân giác xuất phát từ A và B.
Chứng minh rằng nếu $\widehat{A} > \widehat{B}$ thì :

1. $AM < BN$.
2. $AD < BE$.

Bài 5. Tìm nghiệm nguyên của phương trình : $2xy + x + y = 83$.

Đề thi năm 1992 - (Khối chuyên Toán và chuyên Tin - Vòng 1)

Thời gian làm bài : 180 phút

Bài 1.

1. Giải phương trình :

$$\sqrt{x + 2 + 3\sqrt{2x-5}} + \sqrt{x - 2 - \sqrt{2x-5}} = 2\sqrt{2}.$$

2. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} xy^2 - 2y + 3x^2 = 0 \\ y^2 + x^2y + 2x = 0 \end{cases}$$

Bài 2. Tìm tất cả các cặp số nguyên không âm (m, n) để phương trình :

$$x^2 - mnx + m + n = 0$$

có nghiệm nguyên.

Bài 3. Cho tam giác ABC có diện tích S. Trên các cạnh AB, BC, CA lần lượt lấy C', A', B' tương ứng, sao cho :

$$AC' = C'B, \quad \frac{BA'}{A'C} = \frac{1}{2}, \quad \frac{CB'}{B'A} = \frac{1}{3}.$$

Giả sử AA' cắt BB' tại M, BB' cắt CC' tại N, CC' cắt AA' tại P. Tính diện tích tam giác MNP theo S.

Bài 4. Cho tam giác ABC nội tiếp trong một đường tròn. Lấy một điểm D trên cung BC (không chứa A) của đường tròn đó. Hạ DH vuông góc với BC, DI vuông góc với CA và DK vuông góc với AB. Chứng minh rằng:

$$\frac{BC}{DH} = \frac{AC}{DI} + \frac{AB}{DK}.$$

Bài 5. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (m, n) sao cho $2m + 1$ chia hết cho n và $2n + 1$ chia hết cho m.

Đề thi năm 1992 - (Khối chuyên Toán và chuyên Tin - Vòng 2)

Thời gian làm bài : 180 phút

Bài 1.

1. Tìm tất cả các số nguyên n để $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n + 7$ là số chính phương.
2. Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c \leqslant 1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{a^2 + 2bc} + \frac{1}{b^2 + 2ca} + \frac{1}{c^2 + 2ab} \geqslant 9.$$

Bài 2. Cho a là tổng các chữ số của số $(2^9)^{1945}$, b là tổng các chữ số của số a. Tìm tổng các chữ số của số b.

Bài 3. Cho tam giác ABC. Giả sử đường phân giác trong và ngoài của góc A cắt đường thẳng BC tại D, K tương ứng. Chứng minh rằng nếu $AD = AK$ thì $AB^2 + AC^2 = 4R^2$, trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 4.

Trong mặt phẳng kẻ 1992 đường thẳng sao cho không có 2 đường nào song song và không có ba đường nào đồng quy. Tam giác tạo bởi ba đường thẳng trong số các đường thẳng đã cho gọi là "tam giác xanh" nếu nó không bị đường thẳng nào trong số các đường thẳng còn lại cắt.

1. Chứng minh rằng số tam giác xanh không ít hơn 664.
2. Chứng minh kết luận mạnh hơn : Số tam giác xanh không ít hơn 1328.

Bài 5.

Có 41 thành phố được nối với nhau bằng các đường chỉ đi được một chiều. Biết rằng từ mỗi thành phố có đúng 16 đường đến các thành phố khác và đúng 16 đường từ các thành phố khác đến nó. Giữa hai thành phố bất kỳ không có quá một con đường của mạng đường nói trên. Chứng minh rằng từ một thành phố bất kỳ A đều có thể đi đến một thành phố bất kỳ B mà chỉ đi qua nhiều nhất hai thành phố trung gian.

Đề thi năm 1993 - (Chung cho các khối chuyên)

Thời gian làm bài : 180 phút

Bài 1.

1. Giải phương trình

$$x + \sqrt{x + \frac{1}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}} = 2.$$

2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + 2xy^2 + 12y = 0 \\ 8y^2 + x^2 = 12 \end{cases}$$

Bài 2. Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của biểu thức :

$$A = x^2y(4 - x - y)$$

khi x và y thay đổi thoả mãn điều kiện : $x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + y \leqslant 6$.

Bài 3. Cho hình thoi $ABCD$. Gọi R, r lần lượt là bán kính các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABD, ABC và a là độ dài cạnh hình thoi. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{R^2} + \frac{1}{r^2} = \frac{4}{a^2}.$$

Bài 4. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Quay $\triangle ABC$ một góc 90° quanh tâm O ta được $\triangle A_1B_1C_1$. Tính diện tích phần chung của hai hình tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ theo R.

Bài 5. Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c đôi một khác nhau sao cho biểu thức :

$$A = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}$$

nhận giá trị nguyên dương.

Đề thi năm 1993 - (Khối chuyên Toán và chuyên Tin)

Thời gian làm bài : 180 phút

Bài 1.

1. Cho ba số dương a, b, c có tổng bằng 1. Chứng minh rằng :

$$6(ab + bc + ca) + a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2 \leqslant 2.$$

2. Cho $p = x^3 - 3x^2 + 5x, q = y^3 - 3y^2 + 5y$

   Biết rằng $p + q = 6$. Hãy tính $x + y$.

Bài 2. Cho 1993 số nguyên dương, mỗi số đều nhỏ hơn hoặc bằng 1993 và không phải tất cả các số trên đều bằng nhau. Biết rằng tổng của chúng là 3986. Chứng minh rằng từ các số đã cho luôn chọn được k số ($k \geqslant 1$) để tổng của k số này bằng 1993.

Bài 3. Người ta dự định lát nền một căn phòng hình chữ nhật bằng các viên gạch men hình thang cân với các kích thước : đáy nhỏ 7cm, đáy lớn 21cm, cạnh bên $7\sqrt{2}$cm. Số lượng gạch men không hạn chế. Hỏi có thể lát kín được hay không ? (Không được đập vỡ từng viên hay lát chồng viên này lên viên kia). Giải thích vì sao ?

Bài 4. Cho hình bình hành $ABCD$. Trên các cạnh AB, AD ta lấy tương ứng các điểm M và N. Qua M và N lần lượt kẻ các đường thẳng song song với các cạnh AD, AB. Gọi S là giao điểm của các đường thẳng đó. Chứng minh rằng các đường thẳng MD, NB và SC đồng quy.

Bài 5. Trong một giải bóng đá có tám đội tham gia thi đấu vòng tròn (Mỗi đội đá một trận với tất cả các đội còn lại). Giải được chia thành hai đợt. Tìm số trận đấu nhiều nhất có thể có ở đợt đầu sao cho với ba đội bất kỳ đều có ít nhất hai đội chưa thi đấu với nhau trong các đợt đấu.

Đề thi năm 1994 - (Chung cho các khối chuyên)

Thời gian làm bài : 180 phút

Bài 1. Giải các phương trình sau :

1. $x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 16x - 8 = 0$.
2. $x^2 + 2x + 4 = 3\sqrt{x^3 + 4x}$.

Bài 2. Xét các số $x, y, z, t > 0$ thoả mãn hệ thức :

$$xy + 4zt + 2yz + 2xt = 9.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$A = \sqrt{xy} + 2\sqrt{zt}.$$

Bài 3. Tìm tất cả các số nguyên x, y, z, t thoả mãn hệ phương trình :

$$\begin{cases} xy - 3zt = 1 \\ xz + yt = 2 \end{cases}$$

Bài 4. Cho tam giác cân ABC có $AB = AC$ và H là trung điểm của cạnh BC. Một đường tròn đi qua A và tiếp xúc với cạnh BC tại B cắt AC, AH lần lượt tại D và E. Biết rằng D là trung điểm của AC và bán kính đường tròn bằng R. Tính độ dài các dây cung AE, AD theo R.

Bài 5.

Cho tam giác ABC có $BC > AC$. Một đường thẳng song song với cạnh AB cắt các cạnh BC và AC lần lượt tại các điểm M và N. Chứng minh rằng $BN > AM$.

Đề thi năm 1994 - (Khối chuyên Toán và chuyên Tin)

Thời gian làm bài : 180 phút

Bài 1. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} (x+y)(y+z) = 4xy^2z \\ (y+z)(z+x) = 4yz^2x \\ (z+x)(x+y) = 4zx^2y \end{cases}$$

Bài 2. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thoả mãn phương trình :

$$12x^2 + 6xy + 3y^2 = 28(x+y).$$

Bài 3. Xác định các giá trị nguyên dương n $(n \geqslant 3)$ sao cho số $A = 1.2.3\ldots n$ (tích của n số nguyên dương đầu tiên) chia hết cho số $B = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$.

Bài 4. Cho $a, b, c \geqslant 1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c} \geqslant \frac{1}{1+\sqrt[4]{ab^3}}+\frac{1}{1+\sqrt[4]{bc^3}}+\frac{1}{1+\sqrt[4]{ca^3}}.$$

Bài 5. Cho $\triangle ABC$ có $AB = AC$.

1. Chứng minh rằng nếu $\widehat{BAC} = 20°$ thì luôn tìm được các điểm D và K trên các cạnh AB và AC sao cho $AD = DK = KC = CB$.
2. Ngược lại, chứng minh rằng nếu tồn tại các điểm D và K trên các cạnh AB và AC sao cho $AD = DK = KC = CB$ thì $\widehat{BAC} = 20°$.

Đề thi năm 1995 - (Chung cho các khối chuyên)

Thời gian làm bài : 180 phút

Bài 1. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 1 \\ xy + x^2 = 2. \end{cases}$$

Bài 2. Giải phương trình :

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{4+x} = 3.$$

Bài 3. Giả sử a, b là các số nguyên dương sao cho : $\dfrac{a+1}{b} + \dfrac{b+1}{a}$ là một số nguyên. Gọi d là ước số của a và b. Chứng minh rằng : $d \leqslant \sqrt{a+b}$.

Bài 4. Cho hai hình chữ nhật có cùng diện tích. Hình chữ nhật thứ nhất có các kích thước a và b $(a > b)$. Hình chữ nhật thứ hai có các kích thước c và d $(c > d)$. Chứng minh rằng : nếu $a > c$ thì chu vi của hình chữ nhật thứ nhất lớn hơn chu vi của hình chữ nhật thứ hai.

Bài 5. Cho ba điểm cố định A, B, C thẳng hàng theo thứ tự ấy. Gọi (Ω) là một đường tròn qua B và C. Kẻ từ A các tiếp tuyến AE và AF đến đường tròn (Ω) (E và F là các tiếp điểm). Gọi O là tâm của đường tròn (Ω), I là trung điểm của BC, N là trung điểm của EF.

1. Chứng minh rằng : E và F nằm trên một đường tròn cố định khi đường tròn (Ω) thay đổi.
2. Đường thẳng FI cắt đường tròn (Ω) tại E'. Chứng minh rằng EE' song song với AB.
3. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ONI nằm trên một đường thẳng cố định khi đường tròn (Ω) thay đổi.

Đề thi năm 1995 - (Khối chuyên Toán và chuyên Tin)

Thời gian làm bài : 180 phút

Bài 1. Cho $\left(x + \sqrt{x^2 + 3}\right)\left(y + \sqrt{y^2 + 3}\right) = 3$.

Hãy tính giá trị của biểu thức : $E = x + y$.

Bài 2. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + xy + y = 1 \\ y + yz + z = 3 \\ z + zx + x = 7. \end{cases}$$

Bài 3. Cho $x, y \geqslant 0$ và $x^2 + y^2 = 1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant x^3 + y^3 \leqslant 1.$$

Bài 4. Tìm số nguyên có chín chữ số $A = \overline{a_1a_2a_3b_1b_2b_3a_1a_2a_3}$, trong đó $a_1 \neq 0$ và $\overline{b_1b_2b_3} = 2.\overline{a_1a_2a_3}$, đồng thời A có thể viết được dưới dạng $A = p_1^2p_2^2p_3^2p_4^2$ với p_1, p_2, p_3, p_4 là bốn số nguyên tố khác nhau.

Bài 5. Cho đường tròn (Ω), vẽ hai dây cung AB và CD cắt nhau ở I (I nằm trong đường tròn). Gọi M là trung điểm của BD, MI kéo dài cắt AC ở N. Chứng minh rằng :

$$\frac{AN}{NC} = \frac{AI^2}{CI^2}.$$

Đề thi năm 1996 - (Chung cho các khối chuyên)

Thời gian làm bài : 180 phút

Bài 1. Cho $x > 0$, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)^6 - \left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right) - 2}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + x^3 + \frac{1}{x^3}}.$$

Bài 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{2 - \dfrac{1}{y}} = 2 \\ \dfrac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{2 - \dfrac{1}{x}} = 2. \end{cases}$$

Bài 3. Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương ta có :

$$n^3 + 5n \;\vdots\; 6.$$

Bài 4. Cho $a, b, c > 0$, chứng minh rằng :

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geqslant ab + bc + ca.$$

Bài 5. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a. Gọi M, N, P, Q là các điểm bất kỳ lần lượt nằm trên các cạnh AB, BC, CD, DA.

1. Chứng minh rằng :

$$2a^2 \leqslant MN^2 + NP^2 + PQ^2 + QM^2 \leqslant 4a^2.$$

2. Giả sử M là một điểm cố định cho trước trên cạnh AB. Hãy xác định vị trí của các điểm N, P, Q lần lượt trên các cạnh BC, CD, DA sao cho $MNPQ$ là một hình vuông.

Đề thi năm 1996 - (Khối chuyên Toán và chuyên Tin)

Thời gian làm bài : 180 phút

Phần chung cho chuyên Toán và chuyên Tin

Bài 1. Giải phương trình :

$$(\sqrt{x-1}+1)^3 + 2\sqrt{x-1} = 2 - x.$$

Bài 2. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x - \sqrt{y} = 1 \\ y - \sqrt{z} = 1 \\ z - \sqrt{x} = 1 \end{cases}$$

Bài 3. Cho x, y là những số nguyên dương thay đổi thoả mãn điều kiện :

$$x + y = 201.$$

Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = x(x^2 + y) + y(y^2 + x).$$

Bài 4. Cho đoạn thẳng BC và đường thẳng (d) song song với BC. Biết rằng khoảng cách giữa đường thẳng (d) và đường thẳng đi qua BC nhỏ hơn $\dfrac{BC}{2}$. Giả sử A là một điểm thay đổi trên đường thẳng (d).

1. Hãy xác định vị trí của điểm A để bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ nhỏ nhất.

2. Gọi h_a, h_b, h_c là độ dài các đường cao của $\triangle ABC$. Hãy xác định vị trí của điểm A để tích $h_a.h_b.h_c$ là lớn nhất.

Phần dành cho chuyên Toán

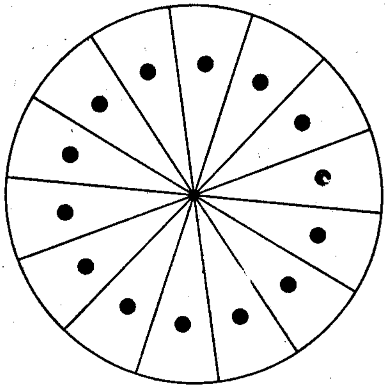
Bài 5. Cho $x, y, z > 0$ và $x + y + z \leqslant \dfrac{3}{2}$. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geqslant \frac{3}{2}\sqrt{17}.$$

Phần dành cho chuyên Tin

Bài 5.

Chia một hình tròn thành 14 hình quạt bằng nhau. Trong mỗi hình quạt đặt một viên bi (xem hình vẽ). Gọi T là phép biến đổi: Lấy hai hình quạt bất kỳ có bi và chuyển từ mỗi hình quạt đó một viên bi sang hình quạt liền kề nhưng theo hai chiều ngược nhau (ví dụ, nếu viên bi ở một hình quạt được chuyển theo chiều kim đồng hồ thì viên bi ở hình quạt kia được chuyển theo chiều ngược lại).



Hỏi bằng việc thực hiện phép biến đổi trên, sau một số hữu hạn bước ta có thể chuyển được tất cả các viên bi vào một hình quạt được không ? Nếu có, hãy chỉ ra quá trình biến đổi. Nếu không, hãy giải thích tại sao ?

Đề thi năm 1997 - (Chung cho các khối chuyên)

Thời gian làm bài : 180 phút

Bài 1. Cho

$$x = \frac{\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}}(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{5}}.$$

Tính $P = (x^3 - 4x + 1)^{1997}$.

Bài 2. Giải phương trình :

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{x+8} = 5\sqrt{x}.$$

Bài 3. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2xy = x + y + 1 \\ 2yz = y + z + 7 \\ 2xz = z + x + 2. \end{cases}$$

Bài 4. Tìm tất cả các số tự nhiên n để $2^n + 15$ là số chính phương.

Bài 5. Cho tam giác đều ABC cạnh l. Bên trong tam giác ta đặt 2 đường tròn (O, R) và (O', R') tiếp xúc ngoài với nhau, sao cho một trong hai đường tròn tiếp xúc với các cạnh BC và BA, đường tròn kia tiếp xúc với các cạnh BC và CA.

1. Chứng minh rằng $R + R' \geqslant \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.
2. Các bán kính R và R' bằng bao nhiêu để tổng diện tích các hình tròn (O, R) và (O', R') nhỏ nhất và tính giá trị nhỏ nhất đó.

Đề thi năm 1997 - (Khối chuyên Toán và chuyên Tin)

Thời gian làm bài : 180 phút

Bài 1. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} y^3 + y^2x + 3x - 6y = 0 \\ x^2 + xy = 3. \end{cases}$$

Bài 2. Có tồn tại hay không các số nguyên x, y thoả mãn điều kiện :

$$1992x^{1993} + 1993y^{1994} = 1995.$$

Bài 3. Số 1997 viết được dưới dạng tổng n hợp số, nhưng không viết được dưới dạng tổng $n+1$ hợp số. Hỏi n bằng bao nhiêu ?

Bài 4. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn có bán kính bằng 1. Gọi h_a, h_b, h_c lần lượt là độ dài các đường cao hạ từ đỉnh A, B, C tới các cạnh đối diện. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$M = \frac{1}{h_a + 2h_b} + \frac{1}{h_b + 2h_c} + \frac{1}{h_c + 2h_a}.$$

Bài 5. Trên đường tròn cho 16 điểm và dùng 3 màu xanh, đỏ, vàng để tô các điểm này (mỗi điểm tô bằng một màu). Giữa mỗi cặp điểm nối bằng một đoạn thẳng được tô bằng màu tím hoặc màu nâu.

Chứng minh rằng với mọi cách tô màu trên các điểm (chỉ dùng 3 màu: xanh, đỏ, vàng) và mọi cách tô màu trên các đoạn thẳng nối giữa các cặp điểm (chỉ dùng hai màu : tím hoặc nâu) ta đều tìm được trên hình vẽ một tam giác có đỉnh là các điểm đã cho, mà các đỉnh được tô bằng cùng một màu và các cạnh cũng được tô bằng cùng một màu (dĩ nhiên là khác màu tô trên đỉnh).

Đề thi năm 1998 - (Chung cho các khối chuyên)

Thời gian làm bài : 180 phút

Bài 1.

1. Giải phương trình :

$$\sqrt{2 - x^2} + \sqrt{x^2 + 8} = 4.$$

2. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 21 \end{cases}$$

Bài 2. Các số a, b thoả mãn điều kiện :

$$\begin{cases} a^3 - 3ab^2 = 19 \\ b^3 - 3a^2b = 98 \end{cases}$$

Hãy tính giá trị của biểu thức : $P = a^2 + b^2$.

Bài 3. Cho các số $a, b, c \in [0, 1]$. Chứng minh rằng :

$$a + b^2 + c^3 - ab - bc - ca \leqslant 1.$$

Bài 4. Cho đường tròn (ε) bán kính R. A và B là hai điểm cố định trên đường tròn, $(AB < 2R)$. Giả sử M là một điểm thay đổi trên cung lớn AB của đường tròn.

1. Kẻ từ B đường thẳng vuông góc với AM, đường thẳng này cắt AM tại I và cắt đường tròn (ε) tại N. Gọi J là trung điểm của MN. Chứng minh rằng khi M thay đổi trên đường tròn thì mỗi điểm I, J đều nằm trên một đường tròn cố định.
2. Xác định vị trí của điểm M để chu vi của $\triangle AMB$ là lớn nhất.

Bài 5.

1. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho mỗi số $n + 26$ và $n - 11$ đều là lập phương của một số nguyên dương.
2. Cho các số x, y, z thay đổi thoả mãn điều kiện : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$P = xy + yz + zx + \frac{1}{2}[x^2(y-z)^2 + y^2(z-x)^2 + z^2(x-y)^2].$$

Đề thi năm 1998 - (Khối chuyên Toán và chuyên Tin)

Thời gian làm bài : 180 phút

Bài 1.

1. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + x^2 + x^3 + x^4 = y + y^2 + y^3 + y^4 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

2. Với những giá trị nào của a thì phương trình sau đây có nghiệm :

$$\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}=|1-a|+|1+a|.$$

Bài 2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình :

$$19x^3-98y^2=1998.$$

Bài 3.

1. Cho a, b, c là các số thoả mãn hai điều kiện sau :

   i) $0 < a < b$,

   ii) Phương trình $ax^2+bx+c=0$ vô nghiệm.

   Chứng minh rằng : $\dfrac{a+b+c}{b-a} > 3$.

2. Cho $x, y, z > 0$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P=\frac{x^2}{x^2+2yz}+\frac{y^2}{y^2+2zx}+\frac{z^2}{z^2+2xy}.$$

Bài 4. Cho bảng ô vuông kích thước 1998×2000 (bảng gồm 1998 hàng và 2000 cột).

Ký hiệu (m, n) là ô vuông nằm ở giao của hàng thứ m (tính từ trên xuống dưới) và cột thứ n (tính từ trái sang phải).

Cho các số nguyên p, q với $1 \leqslant p \leqslant 1993$ và $1 \leqslant q \leqslant 1995$.

Tô màu các ô vuông con của bảng theo quy tắc : Lần thứ nhất tô màu năm ô : $(p, q); (p+1, q+1); (p+2, q+2); (p+3, q+3); (p+4, q+4)$. Lần thứ hai trở đi, mỗi lần tô năm ô chưa có màu nằm liên tiếp trong cùng một hàng hoặc cùng một cột.

Hỏi bằng cách đó ta có thể tô màu hết tất cả các ô vuông con của bảng hay không ? Vì sao ?

Bài 5. Cho tam giác đều ABC.

Trong $\triangle ABC$, vẽ ba đường tròn $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ có bán kính bằng nhau, tiếp xúc ngoài lẫn nhau và mỗi đường tròn đều tiếp xúc với hai cạnh của tam giác.

Gọi ε là đường tròn tiếp xúc ngoài với cả ba đường tròn $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Biết bán kính của đường tròn ε là r, hãy tính độ dài cạnh của $\triangle ABC$.

Đề thi năm 1999 - (Chung cho các khối chuyên)

Thời gian làm bài : 180 phút

Bài 1. Cho các số a, b, c thoả mãn điều kiện :

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ a^2+b^2+c^2=14 \end{cases}$$

Hãy tính giá trị của biểu thức : $P = 1 + a^4 + b^4 + c^4$.

Bài 2.

1. Giải phương trình

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = \sqrt{2x-8}.$$

2. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{9}{2} \\ xy + \dfrac{1}{xy} = \dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Bài 3. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho : $n^2 + 9n - 2$ chia hết cho $n + 11$.

Bài 4. Cho đường tròn (C) và điểm I ở trong đường tròn. Dựng qua I hai dây cung bất kỳ MIN và EIF. Gọi M', N', E', F' là các trung điểm của IM, IN, IE, IF.

1. Chứng minh rằng tứ giác $M'E'N'F'$ là tứ giác nội tiếp.
2. Giả sử I thay đổi, các dây cung MIN, EIF thay đổi. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tứ giác $M'E'N'F'$ có bán kính không đổi.

3. Giả sử I cố định, các dây cung MIN, EIF thay đổi nhưng luôn luôn vuông góc với nhau. Tìm vị trí của các dây cung MIN và EIF sao cho tứ giác $M'E'N'F'$ có diện tích lớn nhất.

Bài 5. Các số dương x và y thay đổi thoả mãn điều kiện : $x + y = 1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \left(x^2 + \frac{1}{y^2}\right)\left(y^2 + \frac{1}{x^2}\right).$$

Các thí sinh thi vào Khối chuyên Sinh không phải làm bài 5.

Đề thi năm 1999 - (Khối chuyên Toán và chuyên Tin)

Thời gian làm bài : 150 phút

Bài 1. Giải phương trình :

$$\sqrt{\frac{x+7}{x+1}} + 8 = 2x^2 + \sqrt{2x-1}.$$

Bài 2. Các số $a_1, a_2, \ldots$ được xác định bởi công thức :

$$a_k = \frac{3k^2 + 3k + 1}{(k^2+k)^3} \qquad \text{với mọi} \quad k \geqslant 1.$$

Hãy tính giá trị của tổng : $1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_9$.

Bài 3. Chứng minh rằng tồn tại một số chia hết cho 1999 và tổng các chữ số của số đó bằng 1999.

Bài 4. Cho đường tròn tâm O bán kính R. Giả sử A và B là hai điểm cố định trên đường tròn với $AB = R\sqrt{3}$.

1. Giả sử M là một điểm thay đổi trên cung lớn AB của đường tròn. Đường tròn nội tiếp $\triangle MAB$ tiếp xúc với MA tại E và tiếp xúc với MB tại F. Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định khi M thay đổi.

2. Tìm tập hợp tất cả các điểm P sao cho đường thẳng $\triangle$ vuông góc với OP tại P cắt đoạn thẳng AB.

Bài 5. Cho hình tròn (C) bán kính bằng 1. Giả sử $A_1, A_2, \ldots, A_8$ là 8 điểm bất kỳ nằm trong hình tròn (kể cả trên biên). Chứng minh rằng trong các điểm đã cho luôn tồn tại hai điểm mà khoảng cách giữa chúng nhỏ hơn 1.

Đề thi năm 2000 - (Chung cho các khối chuyên)

Thời gian làm bài : 150 phút

Bài 1.

1. Tính

$$S = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{1999.2000}.$$

2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{x}{y} = 3 \\ x + \dfrac{1}{y} + \dfrac{x}{y} = 3 \end{cases}$$

Bài 2.

1. Giải phương trình

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x^3 + x^2 + x + 1} = 1 + \sqrt{x^4 - 1}.$$

2. Tìm tất cả các giá trị của a (a là số thực) để phương trình

$$2x^2 - \left(4a + \frac{11}{2}\right)x + 4a^2 + 7 = 0$$

có ít nhất một nghiệm nguyên.

Bài 3. Cho đường tròn tâm O nội tiếp trong hình thang $ABCD$ $(AB//CD)$, tiếp xúc với cạnh AB tại E và với cạnh CD tại F.

1. Chứng minh rằng :

$$\frac{BE}{AE} = \frac{DF}{CF}.$$

2. Cho biết $AB = a, CB = b$ $(a < b), BE = 2AE$. Tính diện tích hình thang $ABCD$.

Bài 4. Cho x, y là hai số thực bất kỳ khác không. Chứng minh rằng :

$$\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \geqslant 3.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

Đề thi năm 2000 - (Khối chuyên Toán và chuyên Tin)

Thời gian làm bài : 150 phút

Bài 1.

1. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thoả mãn đẳng thức

$$y(x-1) = x^2 + 2.$$

2. Cho cặp số (x, y) thoả mãn các điều kiện

$$-1 \leqslant x + y \leqslant 1, \quad -1 \leqslant xy + x + y \leqslant 1.$$

Chứng minh rằng : $|x| \leqslant 2, |y| \leqslant 2$.

Bài 2.

1. Giải phương trình :

$$\frac{4}{x} + \sqrt{x - \frac{1}{x}} = x + \sqrt{2x - \frac{5}{x}}.$$

2. Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ có tính chất: $f(1), f(4)$ và $f(9)$ là các số hữu tỷ. Chứng minh rằng khi đó a, b, c là các số hữu tỷ.

Bài 3.

1. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Chứng minh rằng nếu các góc B và D của tứ giác là vuông hoặc tù thì $AC \geqslant BD$.
2. Cho đoạn thẳng AC cố định và điểm B di động. Hãy tìm tập hợp tất cả các điểm B để tam giác ABC là tam giác không tù và góc $\widehat{BAC}$ là góc nhỏ nhất của tam giác ABC.

Bài 4. Trên mặt phẳng cho 6 điểm sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng và khoảng cách giữa các cặp điểm là các số khác nhau. Ta nối mỗi cặp điểm bởi một đoạn thẳng. Chứng minh rằng trong các đoạn thẳng thu được có một đoạn thẳng là cạnh nhỏ nhất của một tam giác có 3 đỉnh là 3 trong 6 điểm đã cho, đồng thời là cạnh lớn nhất của một tam giác khác cũng có 3 đỉnh là 3 trong 6 điểm đã cho.

Đề thi năm 2001 - (Chung cho các khối chuyên)

Thời gian làm bài : 150 phút

Bài 1. Tìm các giá trị nguyên x, y thoả mãn đẳng thức

$$(y+2)x^2+1=y^2.$$

Bài 2.

1. Giải phương trình :

$$\sqrt{x(3x+1)}-\sqrt{x(x-1)}=2\sqrt{x^2}.$$

2. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2+xy+2=3x+y \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$$

Bài 3. Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2a$. Trên đoạn AB lấy điểm M. Trong nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa vòng tròn, ta kẻ hai tia Mx và My sao cho $\widehat{AMx} = \widehat{BMy} = 30^0$. Tia Mx cắt nửa đường tròn ở E, tia My cắt nửa đường tròn ở F. Kẻ EE', FF' vuông góc xuống AB.

1. Cho $AM = \frac{a}{2}$, tính diện tích hình thang vuông $EE'F'F$ theo a.
2. Khi điểm M di động trên AB, chứng minh rằng đường thẳng EF luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Bài 4. Giả sử x, y, z là các số thực khác không thoả mãn hệ đẳng thức :

$$\begin{cases} x\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + y\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right) + z\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = -2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1. \end{cases}$$

Hãy tính giá trị của biểu thức :

$$P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

Bài 5. Với x, y, z là những số thực dương, hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

Đề thi năm 2001 - (Khối chuyên Toán và chuyên Tin)

Thời gian làm bài : 150 phút

Bài 1.

1. Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ có tính chất : $f(x)$ nhận giá trị nguyên khi x là số nguyên. Hỏi các hệ số a, b, c có nhất thiết phải là các số nguyên hay không ? Tại sao ?
2. Tìm các số nguyên không âm x, y thoả mãn đẳng thức :

$$x^2 = y^2 + \sqrt{y+1}.$$

Bài 2. Giải phương trình :

$$4\sqrt{x+1} = x^2 - 5x + 14.$$

Bài 3. Cho các số thực a, b, x, y thoả mãn hệ :

$$\begin{cases} ax + by = 3 \\ ax^2 + by^2 = 5 \\ ax^3 + by^3 = 9 \\ ax^4 + by^4 = 17. \end{cases}$$

Hãy tính giá trị của các biểu thức :

$$A = ax^5 + by^5$$
$$B = ax^{2001} + by^{2001}.$$

Bài 4.

Cho đoạn thẳng AB có trung điểm là O. Gọi d_1, d_2 là các đường thẳng vuông góc với AB tương ứng tại A và B. Một góc vuông đỉnh O có một cạnh cắt d_1 ở M, còn cạnh kia cắt d_2 ở N. Kẻ OH vuông góc xuống MN. Vòng tròn ngoại tiếp tam giác MHB cắt d_1 ở điểm thứ hai E khác M, MB cắt NA ở I, đường thẳng HI cắt EB ở K. Chứng minh rằng K nằm trên một đường tròn cố định khi góc vuông quay xung quanh đỉnh O.

Bài 5.

Cho 2001 đồng tiền, mỗi đồng tiền được sơn một mặt bằng màu đỏ và mặt kia bằng màu xanh. Xếp 2001 đồng tiền đó theo một vòng tròn sao cho tất cả các đồng tiền đều có mặt xanh ngửa lên phía trên. Cho phép mỗi lần đổi mặt đồng thời 5 đồng tiền liên tiếp cạnh nhau. Hỏi với cách làm như thế, sau một số hữu hạn lần ta có thể làm cho tất cả các đồng tiền đều có mặt đỏ ngửa lên phía trên được hay không ? Tại sao ?

Đề thi năm 2002 - (Chung cho các khối chuyên)

Thời gian làm bài : 150 phút

Bài 1.

1. Giải phương trình : $\sqrt{8+\sqrt{x}}+\sqrt{5-\sqrt{x}}=5$.
2. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} (x+1)(y+1)=8 \\ x(x+1)+y(y+1)+xy=17. \end{cases}$$

Bài 2. Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng phương trình $x^2+(a+b+c)x+ab+bc+ca=0$ vô nghiệm.

Bài 3. Tìm tất cả các số nguyên n sao cho n^2+2002 là một số chính phương.

Bài 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P=\frac{1}{1+xy}+\frac{1}{1+yz}+\frac{1}{1+zx}$$

trong đó x, y, z là các số dương thay đổi thoả mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2 \leqslant 3$.

Bài 5. Cho hình vuông $ABCD$, M là điểm thay đổi trên cạnh BC (M không trùng với B) và N là điểm thay đổi trên cạnh CD (N không trùng với D) sao cho :

$$\widehat{MAN}=\widehat{MAB}+\widehat{NAD}.$$

1. BD cắt AN và AM tương ứng tại P và Q. Chứng minh rằng năm điểm P, Q, M, C, N cùng nằm trên một đường tròn.
2. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định khi M và N thay đổi.
3. Ký hiệu diện tích của tam giác APQ là S_1 và diện tích của tứ giác $PQMN$ là S_2. Chứng minh rằng tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ không đổi khi M và N thay đổi.

Đề thi năm 2002 - (Khối chuyên Toán và chuyên Tin)

Thời gian làm bài : 150 phút

Bài 1.

1. Giải phương trình :

$$\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{x+3}=\sqrt{x-2}+\sqrt{x^2+2x-3}.$$

2. Tìm nghiệm nguyên của phương trình : $x+xy+y=9$.

Bài 2. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2+y^2+xy=1 \\ x^3+y^3=x+3y. \end{cases}$$

Bài 3. Cho mười số nguyên dương $1,2,\ldots,10$. Sắp xếp mười số đó một cách tuỳ ý thành một hàng. Cộng mỗi số với số thứ tự của nó trong hàng, ta được mười tổng. Chứng minh rằng trong mười tổng đó tồn tại ít nhất hai tổng có chữ số tận cùng giống nhau.

Bài 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P=\frac{4a}{b+c-a}+\frac{9b}{a+c-b}+\frac{16c}{a+b-c}$$

trong đó a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Bài 5.

Đường tròn (C) tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC,CA,AB tương ứng tại các điểm A',B',C'.

1. Gọi các giao điểm của đường tròn (C) với các đoạn IA,IB,IC lần lượt là M,N,P. Chứng minh rằng các đường thẳng $A'M,B'N,C'P$ đồng quy.
2. Kéo dài đoạn AI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại D (khác A). Chứng minh rằng $\dfrac{IB.IC}{ID}=2r$, trong đó r là bán kính đường tròn (C).

Đề thi năm 2003 - (Chung cho các khối chuyên)

Thời gian làm bài : 150 phút

Bài 1. Giải phương trình :

$$(\sqrt{x+5}-\sqrt{x+2})(1+\sqrt{x^2+7x+10}=3.$$

Bài 2. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2x^3+3x^2y=5 \\ y^3+6xy^2=7. \end{cases}$$

Bài 3. Tìm các số nguyên x, y thoả mãn đẳng thức :

$$2y^2x+x+y+1=x^2+2y^2+xy.$$

Bài 4. Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB=2R$ (R là một độ dài cho trước), M, N là hai điểm trên nửa đường tròn (O) sao cho M thuộc cung AN và tổng các khoảng cách từ A, B đến đường thẳng MN bằng $R\sqrt{3}$.

1. Tính độ dài đoạn MN theo R.
2. Gọi giao điểm của hai dây AN và BM là I, giao điểm của các đường thẳng AM và BN là K. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, I, K cùng nằm trên một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó theo R.
3. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác KAB theo R khi M, N thay đổi nhưng vẫn thoả mãn giả thiết của bài toán.

Bài 5. x, y, z là các số thực thoả mãn điều kiện :

$$x+y+z+xy+yz+zx=6$$

Chứng minh rằng : $x^2+y^2+z^2 \geqslant 3$.

Đề thi năm 2003 - (Khối chuyên Toán và chuyên Tin)

Thời gian làm bài : 150 phút

Bài 1. Cho phương trình :

$$x^4 + 2mx^2 + 4 = 0.$$

Tìm giá trị của tham số m để phương trình có 4 nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 thoả mãn :

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 32.$$

Bài 2. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 - 5x + y + 2 = 0, \\ x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0. \end{cases}$$

Bài 3. Tìm các số nguyên x, y thoả mãn đẳng thức :

$$x^2 + xy + y^2 = x^2y^2.$$

Bài 4. Cho đường tròn tâm O nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại các điểm D, E, F. Đường tròn tâm O' bàng tiếp trong góc $\widehat{BAC}$ của tam giác ABC tiếp xúc với cạnh BC và phần kéo dài của các cạnh AB, AC tương ứng tại các điểm P, M, N.

1. Chứng minh rằng : $BP = CD$.
2. Trên đường thẳng MN ta lấy các điểm I và K sao cho $CK//AB, BI//AC$. Chứng minh rằng các tứ giác $BICE$ và $BKCF$ là các hình bình hành.
3. Gọi (S) là đường tròn đi qua ba điểm I, K, P. Chứng minh rằng (S) tiếp xúc với các đường thẳng BC, BI, CK.

Bài 5. Số thực x thay đổi và thoả mãn điều kiện $x^2 + (3 - x)^2 \geqslant 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$p = x^4 + (3 - x)^4 + 6x^2(3 - x)^2.$$

Đề thi năm 2004 - (Chung cho các khối chuyên)

Thời gian làm bài : 150 phút

Bài 1.

1. Giải phương trình :

$$|x+1|+|x-1|=1+|x^2-1|.$$

2. Tìm nghiệm nguyên của hệ :

$$\begin{cases} 2y^2-x^2-xy+2y-2x=7 \\ x^3+y^3+x-y=8. \end{cases}$$

Bài 2. Cho các số thực dương a và b thoả mãn :

$$a^{100}+b^{100}=a^{101}+b^{101}=a^{102}+b^{102}.$$

Hãy tính giá trị của biểu thức :

$$P=a^{2004}+b^{2004}.$$

Bài 3. Cho $\triangle ABC$ có $AB=3cm, BC=4cm, CA=5cm$. Đường cao, đường phân giác, đường trung tuyến của tam giác kẻ từ đỉnh B chia tam giác thành 4 phần. Hãy tính diện tích mỗi phần.

Bài 4. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại H (H không trùng với tâm của đường tròn). Gọi M và N lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ H xuống các đường thẳng AB và BC; P và Q lần lượt là giao điểm của đường thẳng MH và NH với các đường thẳng CD và DA. Chứng minh rằng đường thẳng PQ song song với đường thẳng AC và bốn điểm M, N, P, Q nằm trên cùng một đường tròn.

Bài 5. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$Q=\frac{1}{2}\left(\frac{x^{10}}{y^2}+\frac{y^{10}}{x^2}\right)+\frac{1}{4}(x^{16}+y^{16})-(1+x^2y^2)^2.$$

Đề thi năm 2004 - (Khối chuyên Toán và chuyên Tin)

Thời gian làm bài : 150 phút

Bài 1. Giải phương trình :

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}=2.$$

Bài 2. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} (x+y)(x^2+y^2)=15 \\ (x-y)(x^2-y^2)=3. \end{cases}$$

Bài 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P=\frac{(x^3+y^3)-(x^2+y^2)}{(x-1)(y-1)}$$

trong đó x, y là những số thực lớn hơn 1.

Bài 4. Cho hình vuông $ABCD$ và điểm M nằm trong hình vuông.

1. Tìm tất cả các vị trí của điểm M sao cho $\widehat{MAB}=\widehat{MBC}=\widehat{MCD}=\widehat{MDA}$.

2 Xét điểm M nằm trên đường chéo AC. Gọi N là chân đường vuông góc hạ từ điểm M xuống cạnh AB và O là trung điểm của đoạn AM. Chứng minh rằng tỉ số $\frac{OB}{CN}$ có giá trị không đổi khi M di chuyển trên đường chéo AC.

3. Với giả thiết M nằm trên đường chéo AC, xét các đường tròn (S_1) và (S_2) có đường kính tương ứng là AM và CN. Hai tiếp tuyến chung của (S_1) và (S_2) tiếp xúc với (S_2) tại P và Q. Chứng minh rằng đường thẳng PQ tiếp xúc với (S_1).

Bài 5. Với số thực a, ta định nghĩa phần nguyên của số a là số nguyên lớn nhất không vượt quá a và ký hiệu là $[a]$. Dãy các số $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ được xác định bởi công thức :

$$x_n=\left[\frac{n+1}{\sqrt{2}}\right]-\left[\frac{n}{\sqrt{2}}\right].$$

Hỏi trong 200 số $\{x_0, x_1, \ldots, x_{199}\}$ có bao nhiêu số khác 0 ? (Cho biết $1,41<\sqrt{2}<1,42$).

Đề thi năm 2005 - (Chung cho các khối chuyên)

Thời gian làm bài : 150 phút

Bài 1. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y + xy = 3 \\ x^2 + y^2 = 2. \end{cases}$$

Bài 2. Giải phương trình :

$$x + 4\sqrt{x+3} + 2\sqrt{3-2x} = 11.$$

Bài 3. Tìm nghiệm nguyên của phương trình :

$$x^2 + 17y^2 + 34xy + 51(x+y) = 1740.$$

Bài 4. Cho hai đường tròn $(O), (O')$ nằm ngoài nhau có tâm tương ứng là O và O'. Một tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn tiếp xúc với (O) tại A và (O') tại B. Một tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn cắt AB tại I, tiếp xúc với (O) tại C và (O') tại D. Biết rằng C nằm giữa I và D.

1. Hai đường thẳng $OC, O'B$ cắt nhau tại M. Chứng minh rằng :

$$OM > O'M.$$

2. Ký hiệu (S) là đường tròn đi qua A, C, B và (S') là đường tròn đi qua A, D, B. Đường thẳng CD cắt (S) tại E khác C và cắt (S') tại F khác D. Chứng minh rằng AF vuông góc với BE.

Bài 5. Giả sử x, y, z là các số dương thay đổi và thoả mãn điều kiện $xy^2z^2 + x^2z + y = 3z^2$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$P = \frac{z^4}{1 + z^4(x^4 + y^4)}.$$

Đề thi năm 2005 - (Khối chuyên Toán và chuyên Tin)

Thời gian làm bài : 150 phút

Bài 1. Giải phương trình :

$$\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}+\sqrt{4-x^2}=2.$$

Bài 2. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^3+y^3-xy^2 &= 1 \\ 4x^4+y^4 &= 4x+y. \end{cases}$$

Bài 3. Giả sử x, y là những số không âm thoả mãn điều kiện : $x^2+y^2=1$.

1. Chứng minh rằng : $1 \leqslant x+y \leqslant \sqrt{2}$.
2. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P=\sqrt{1+2x}+\sqrt{1+2y}.$$

Bài 4. Cho hình vuông $ABCD$ và điểm P nằm trong tam giác ABC.

1. Giả sử góc $\widehat{BPC}=135^0$. Chứng minh rằng : $2PB^2+PC^2=PA^2$.
2. Các đường thẳng AP và CP cắt các cạnh BC và BA tương ứng tại các điểm M và N. Gọi Q là điểm đối xứng với B qua trung điểm của đoạn MN. Chứng minh rằng khi P thay đổi trong $\triangle ABC$, đường thẳng PQ luôn đi qua D.

Bài 5.

1. Cho đa giác đều (H) có 14 đỉnh. Chứng minh rằng trong 6 đỉnh bất kỳ của (H) luôn có 4 đỉnh là các đỉnh của một hình thang.
2. Có bao nhiêu phân số tối giản $\frac{m}{n}$ lớn hơn 1 (m, n là các số nguyên dương) thoả mãn $m.n=13860$.

Đề thi năm 2006 - (Chung cho các khối chuyên)

Thời gian làm bài : 150 phút

Bài 1. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 + xy + x + y = 4 \\ (x+1)(1+xy) = 4 \end{cases}$$

Bài 2. Với những giá trị của x thỏa mãn điều kiện $x \geqslant -\frac{1}{2}$, hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$f(x) = \sqrt{2x^2 + 5x + 2} + 2\sqrt{x+3} - 2x$$

Bài 3. Tìm số tự nhiên gồm bốn chữ số thỏa mãn đồng thời hai tính chất

1. Khi chia số đó cho 100 ta được số dư là 6.
2. Khi chia số đó cho 51 ta được số dư là 17.

Bài 4. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh $AB = a$. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA lấy lần lượt các điểm M, N, P, Q sao cho $MN//AC, PQ//AC$ và $\widehat{AMQ} = 30°$.

1. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua đường thẳng MQ, C' là điểm đối xứng với C qua đường thẳng NP. Giả sử đường thẳng QA' cắt đoạn thẳng NP tại E, đường thẳng PC' cắt đoạn thẳng MQ tại F. Chứng minh rằng năm điểm E, F, Q, D, P nằm trên cùng một đường tròn.
2. Biết $AC = 3MN$, tính diện tích hình thang $MNPQ$ theo a.

Bài 5. Chứng minh rằng với mỗi số dương a cho trước, đa thức

$$f(x) = x^4 + ax^2 + 2$$

luôn là tổng bình phương của hai đa thức bậc hai.

Đề thi năm 2006 - (Khối chuyên Toán và chuyên Tin)

Thời gian làm bài : 150 phút

Bài 1. Chứng minh rằng :

$$\left(\sqrt[3]{1+\frac{\sqrt{84}}{9}}+\sqrt[3]{1-\frac{\sqrt{84}}{9}}\right)$$

là một số nguyên.

Bài 2. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2-y^2=4x-2y-3 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$$

Bài 3.

1. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$8x^2y^2+x^2+y^2=10xy.$$

2. Ký hiệu $[x]$ là phần nguyên của số x (số nguyên lớn nhất không vượt quá x). Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n ta luôn có

$$[\sqrt[3]{72n+1}]=[\sqrt[3]{9n}+\sqrt[3]{9n+1}]=[\sqrt[3]{72n+7}]$$

Bài 4. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O) và I là điểm nằm trong $\triangle ABC$. Các đường thẳng AI, BI, CI cắt đường tròn (O) lần lượt tại A', B', C' (khác A, B, C). Dây cung $B'C'$ cắt các cạnh AB, AC tương ứng tại các điểm M, N. Dây cung $C'A'$ cắt các cạnh AB, BC tương ứng tại các điểm P, Q. Dây cung $A'B'$ cắt các cạnh BC, CA tương ứng tại các điểm F, E.

1. Giả sử $AM = AN, BP = BQ, CE = CF$ xảy ra đồng thời. Chứng minh rằng I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.

2. Giả sử $AM = AN = BP = BQ = CE = CF$. Chứng minh rằng sáu điểm M, N, P, Q, E, F cùng nằm trên một đường tròn.

Bài 5. Chứng minh rằng đa giác lồi $2n$ cạnh $(n \in N, n \geqslant 2)$ luôn có ít nhất n đường chéo không song song với bất kỳ cạnh nào của đa giác đó.